Cenni di Calcolo Numerico

Claudio Rocchini

Istituto Geografico Militare

Numero Finito di Cifre

Il computer opera sempre con un numero di cifre finito.

I numeri trascendenti o irrazionali hanno un numero infinito di cifre.

Radice di 2 = 1.4142135623730950488016887242097… (continua)

PiGreco = 3.1415926535897932384626433832795… (continua)

Anche semplici frazioni hanno un numero infinito di cifre:

1/3 = 0.33333333333333333… (continua)

Il computer rappresenta i numeri in base 2 (cifre: 0 e 1), in questa base

Anche numeri semplici come 1/5 hanno una rappresentazione infinita:

1/5 = 0.2 = (binario) 0.0011001100110011… (continua)

Calcolo Numerico

Mentre in matematica tutti sanno che:

(1/3) x 3 = 1

spesso utilizzando un calcolatore si ha che:

(1/3) x 3 = 0.99999999999999999

Quando si utilizza il calcolatore per effettuare calcoli numerici bisogna sempre rendersi conto della precisione che ci si puo’ aspettare.

Insieme finito di Numeri

Dato che i numeri rappresentabili sono finiti, ci sono un minimo ed un massimo numero rappresentabili.

Si ha overflow (tracimazione) quando un'operazione produce un numero troppo grande da rappresentare.

Si ha underflow quando il numero è troppo piccolo.

Inoltre anche se un numero è nell'intervallo di rappresentazione, spesso viene approssimato da un altro numero (es. pi greco).

Operazioni di Macchina

Anche se i valori di partenza sono rappresentati esattamente dal calcolatore, puo’ darsi che il risultato di una operazione artmetica su tali valori non sia rappresentabile: l’operazione introduce un errore.

Di solito vale che B = (A+1)-1 = A, ma nel calcolatore si ha:

A = 1 => B = 1

A = 10E-6 => B = 0.9536743 E –6

A = 10E-7 => B = 0

Le operazioni aritmetiche possono creare, propagare o amplificare l’errore di rappresentazione dei numeri del calcolatore.

Es: Valutazione di un Limite

Si supponga di voler valutare il limite della funzione:

F(x) = x (sqrt(x*x+1) – x), provando valori sempre piu' grandi di x:

x	r1	r2	r3	
10000000	0.502914	0.500000	0.500000	r1 = A2*(RADQ(A2^2+1)-A2)
15000000	0.502914	0.500000	0.500000	r2 = A2*RADQ(A2^2+1)-A2^2
20000000	0.521541	0.500000	0.500000	r3 = A2/(RADQ(A2^2+1)+A2)
25000000	0.465661	0.000000	0.500000	
30000000	0.447035	0.000000	0.500000	
35000000	0.521541	0.000000	0.500000	
40000000	0.596046	0.000000	0.500000	
45000000	0.335276	0.000000	0.500000	
50000000	0.372529	0.000000	0.500000	

Es: Prodotto Scalare

Semplice somma di tre valori.

Dov'è il trucco?

(Notare l'ordine della somma)

s1:	10000000000000000	1	-10000000000000000		0	B2+C2+D2			
s2:	10000000000000000	1	-10000000000000000		1	B3+D3+C3			

Algoritmi stabili

Dall'esempio precedente abbiamo visto che ci sono vari modi di calcolare una stessa espressione. Un metodo quindi puo' essere migliore di un altro.

Ad esempio la somma di molti valori di varie grandezze può introdurre grossi errori. Per limitare l'errore si può sommare i valori in ordine di grandezza del valore assoluto.

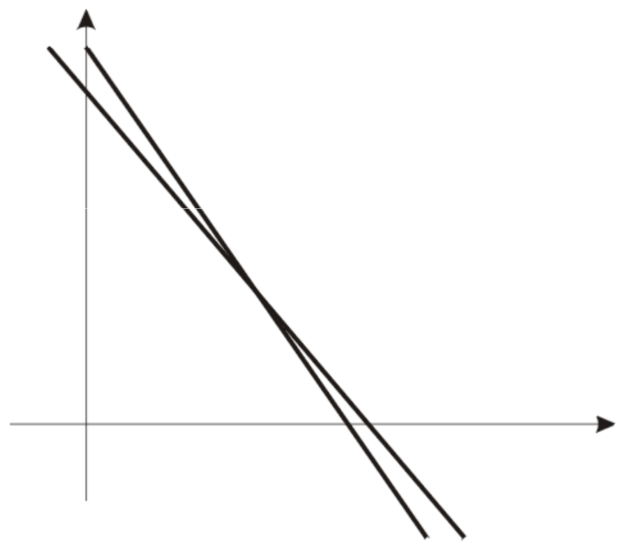
Vedremo in seguito che, invece, ci sono dei problemi intrinsecamente instabili (detti malcondizionati), per cui non esiste nessun metodo corretto di calcolo.

Problemi Malcondizionati

Calcolo dell'intersezione di due rette:

$(1+0.001)x+y=2$

$1001x+1000y = 2001$

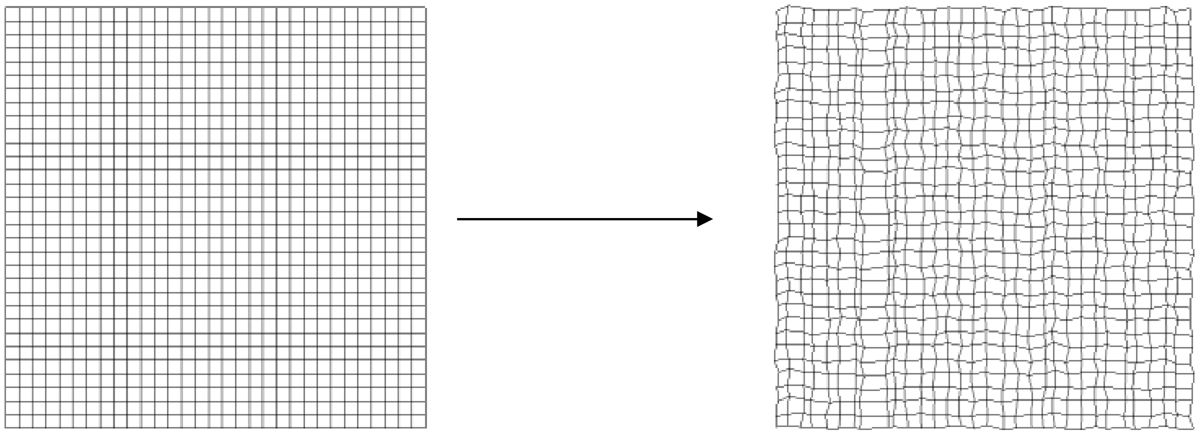


Se le rette sono quasi parallele il problema e' malcondizionato: piccoli errori nei dati generano grandi errori nel risultato.

Questo tipo di errore e' ineliminabile.

Esempio: Geografia

La formula di proiezione UTM e’ molto complessa: addirittura non esiste una formula precisa, si usa quindi una interpolazione (Bonifacio).
Il risultato della proiezione di un reticolo regolare risulta affetto da errori.
(L’errore e’ stato amplificato)

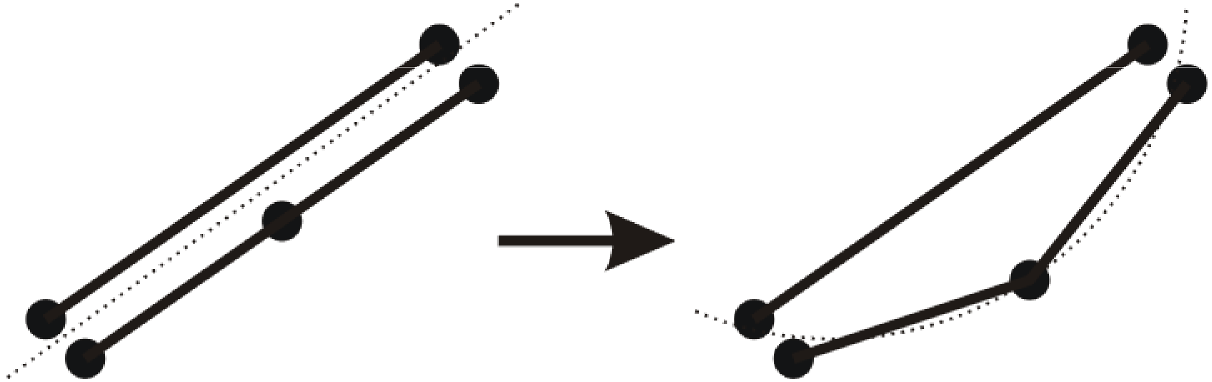


Parte del calcolo UTM

```
A1 = (1 /     2.0) * ENNE * Sin(FI_SA) *  Cos(FI_SA);
    B1 = (1 /    24.0) * ENNE * Sin(FI_SA) * (pow(Cos(FI_SA),3)) * ( 5 - pow(TI,2) + 9 * pow(ETA,2) + 4 * pow(ETA,4));
    C1 = (1 /   720.0) * ENNE * Sin(FI_SA) * (pow(Cos(FI_SA),5)) * (61 - 58 * pow(TI,2) + pow(TI,4) +
                    270    * pow(ETA,2) - 330 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 445 * pow(ETA,4) - 680 * pow(ETA,4) * pow(TI,2)  +
                    324    * pow(ETA,6) - 600 * pow(ETA,6) * pow(TI,2) +  88 * pow(ETA,8) - 192 * pow(ETA,8) * pow(TI,2)) ;
    D1 = (1 / 40320.0) * ENNE * Sin(FI_SA) * (pow(Cos(FI_SA),7)) * (1385 - 3111 * pow(TI,2) + 543 * pow(TI,4) - pow(TI,6) + 10899 * pow(ETA,2) -
                    32802  * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 9219 * pow(ETA,2) * pow(TI,4) + 34419 * pow(ETA,4) - 129087 * pow(ETA,4) * pow(TI,2) +
                    49644  * pow(ETA,4) * pow(TI,4) + 56385 * pow(ETA,6) - 252084 * pow(ETA,6) * pow(TI,2) + 121800 * pow(ETA,6) * pow(TI,4) + 53740 * pow(ETA,8) -
                    310408 * pow(ETA,8) * pow(TI,2) - 200256 * pow(ETA,8) * pow(TI,4));
    E1 = (1 / 3628800.0) * ENNE * Sin(FI_SA) * (pow(Cos(FI_SA),9)) * (50521 - 206276 * pow(TI,2) + 101166 * pow(TI,4) -
                    4916 * pow(TI,6) + pow(TI,8) + 612540 * pow(ETA,2) - 3277980 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 2402100 * pow(ETA,2) * pow(TI,4) -
                    239220 * pow(ETA,2) * pow(TI,6) + 3043190 * pow(ETA,4) - 19954380 * pow(ETA,4) * pow(TI,2) + 19210830 * pow(ETA,4) * pow(TI,4) - 2879440 *
       pow(ETA,4) * pow(TI,6));
    F1 = (1 / 479001600.0) * ENNE * Sin(FI_SA) * (pow(Cos(FI_SA),11)) * (2702765 - 17460701 * pow(TI,2) + 16535834 * pow(TI,4) - 2996242 * pow(TI,6) +
                    221257 * pow(TI,8) - pow(TI,10));
                    //SVILUPPI BONIFACINO A2,B2,C2,D2,E2,F2'
    A2 = ENNE * Cos(FI_SA);
    B2 = (1 /   6.0) * ENNE * (pow(Cos(FI_SA),3)) * (1 - pow(TI,2) + pow(ETA,2));
    C2 = (1 / 120.0) * ENNE * (pow(Cos(FI_SA),5)) * (5 + 14 * pow(ETA,2) - 18 * pow(TI,2) -
                    58 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + pow(TI,4) + 13 * pow(ETA,4) - 64 * pow(ETA,4) * pow(TI,2) +
                    4 * pow(ETA,6) - 24 * pow(ETA,6) * pow(TI,2));
    D2 = (1 / 5040.0) * ENNE * (pow(Cos(FI_SA),7)) * (61 - 479 * pow(TI,2) + 179 * pow(TI,4) - pow(TI,6) + 331 * pow(ETA,2) -
                    3298 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 1771 * pow(ETA,2) * pow(TI,4) + 715 * pow(ETA,4) - 8655 * pow(ETA,4) * pow(TI,2) +
                    6080 * pow(ETA,4) * pow(TI,4) + 769 * pow(ETA,6) - 10964 * pow(ETA,6) * pow(TI,2) + 9480 * pow(ETA,6) * pow(TI,4) + 412 * pow(ETA,8) -
                    6760 * pow(ETA,8) * pow(TI,2) + 6912 * pow(ETA,8) * pow(TI,4) + 88 * pow(ETA,10) - 1632 * pow(ETA,10) * pow(TI,2) +
                    1920 * pow(ETA,10) * pow(TI,4));
    E2 = (1 / 362880.0) * ENNE * (pow(Cos(FI_SA),9)) * (1385 - 19028 * pow(TI,2) + 18270 * pow(TI,4) -
                    1636 * pow(TI,6) + pow(TI,8) + 12284 * pow(ETA,2) - 214140 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 290868 * pow(ETA,2) * pow(TI,4) -
                    47188 * pow(ETA,2) * pow(TI,6) + 45318 * pow(ETA,4) - 951468 * pow(ETA,4) * pow(TI,2) + 1652910 * pow(ETA,4) * pow(TI,4) - 384384 * pow(ETA,4) *
       pow(TI,6) +
                    90804 * pow(ETA,6) - 2220708 * pow(ETA,6) * pow(TI,2) + 4662840 * pow(ETA,6) * pow(TI,4) - 1394064 * pow(ETA,6) * pow(TI,6));
    F2 = (1 / 39916800.0) * ENNE * (pow(Cos(FI_SA),11)) * (50521 - 1073517 * pow(TI,2) + 1949762 * pow(TI,4) - 481250 * pow(TI,6) +
                    73749 * pow(TI,8) - pow(TI,10) + 663061 * pow(ETA,2) - 17594876 * pow(ETA,2) * pow(TI,2) + 43255806 * pow(ETA,2) * pow(TI,4) -
                    23673524 * pow(ETA,2) * pow(TI,6) + 1264933 * pow(ETA,2) * pow(TI,8));
                    //CALCOLO DI BI DI FI_SA'
```

Un inciso: Geografiche Piane

Proiettando le coordinate geografiche in coordinate piane, non e' detto che tre punti allineati rimangano tali. Questo puo' provocare degli errori topologici.



Una delle due linee sovrapposte (es. due confini comunali) ha un vertice in più. Proiettando i vertici in un altro sistema il vertice centrale si allontana dall'altro bordo: i confini non sono più coincidenti.

Riferimenti

Posta:

ad2prod@geomil.esercito.difesa.it

Queste Dispense:

http://www.igm.mil/~rocchini/ (materiali per corsi).

Letture consigliate:

R. Bevilaqua, D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, *Introduzione alla Matematica Computazionale*, Zanichelli Editore.